Об определении плотностного контакта в сложнопостроенной среде

Предложены аналитические модели гравитационного поля и геологической среды для горизонтально-слоистой среды с несколькими плотностными границами раздела слоев в нижнем полупространстве. Первая модель представляет собой уравнение силы тяжести, полученное из рассмотрения нормального потенциала силы тяжести в локальной окрестности текущей точки измерений в двумерном представлении. Для модели среды, в дополнение к известным в теории интерпретации потенциальных полей основным классам контактных поверхностей (Нумерова, Остромогильского и Страхова), введен новый класс Черного контактных. Приведены образцы теорем разделения полей для случая нескольких односвязных объемов и нескольких непересекающихся слоев (2 самых популярных начальных приближения среды) в изучаемой модели.

Analytical models of the gravity field and the geological media for the horizontally layered media with several density layer interfaces in the lower semi-space are offered. The first model is the equation of gravity received from 2-D consideration of normal gravity potential in a local neighborhood of the current measurement point. To media models, besides known main classes of contact surfaces (Numerov, Ostromogilsky and Strakhov) in the theory of potential fields' interpretation, we introduced a new Chorny class of the contact surfaces. Samples of field's separation theorems for a case of several one-coherent volumes and several non-crossed layers (2 most popular media initial approximations) are given in the model studied.

Введение. Сейчас много внимания уделяется вопросам переинтерпретации материала съёмок XX ст., ввиду резкого ограничения объёмов геологоразведки. Но, вследствие повышенных требований к точности и эффективности интерпретации, переработка больших объёмов геофизических данных требует новых подходов к численному обоснованию методов, используемых при обработке соответствующего картографического материала.

Современные методы обработки геофизических данных развиваются с прицелом на создание цифровых аналитических моделей поля и геологической среды и высокоточных алгоритмов, ориентированных на применение в пакетах ГИС. Особенно это касается отображения входной информации и результатов ее трансформации в сопоставлении с априорной информацией, представленной графически (визуальная интерпретация).

Такая „послойная” обработка – новый этап качественной интерпретации, в котором возможности представления информации в виде электронного журнала измерений (Якимчик, 2010) можно использовать для предобработки информации в среде специализированных пакетов программ. Примеры такой предобработки: выделение регионального фона (минимизация невязки между набором данных и некоторым полиномом) в Matlab; предварительная фильтрация измерений в Excel; нахождение особых точек поля (метод обратной интерполяции полинома Лагранжа) в Maple; редукции поля с помощью алгоритмов В.Н. Страхова в Python, и т.п.

К интерпретации данных потенциальных полей, адекватной современной геофизической практике, предъявляют следующие требования:

- высокая точность и технологичность алгоритмов и программ, их переносимость;
- адаптация моделей поля к заданию исходных измерений на коротких профилях;
- адаптация моделей геолог. среды к ее сложному (нелинейному неоднородному) состоянию;

Одно из направлений детерминированного подхода к интерпретации – разработка новых аналитических конструкций геофизического поля (Якимчик, 2009) и геологической среды. Среди последних авторам близки рассмотрения плотностных моделей типа контакта, одну из которых предлагаем вашему вниманию.

Определение контакта в известных моделях среды (Страхова, Нумерова, Маловичко, см. (Чорний, Дубовенко, 2002)) традиционно замыкается на вычисление разности ундуляций теоретической модели среды от некого опорного ее элемента, от которого эти ундуляции не сильно уклоняются. Но при этом необходимо заранее знать геометрию (глубину, форму, ориентацию) опорного элемента (модельного тела либо контакта), как начального приближения итераций. От выбора удачного начального приближения зависит в целом эффективность любого из существующих итерационных алгоритмов (Старостенко, 1978).

Постановка задачи. Наш способ определения контакта можно обобщить таким образом. В горизонтально-слоистой среде с *n* плотностными границами раздела слоёв ∂G_1 и ∂G_2 в нижнем полупространстве $G_1 \cap G_2 = G_2$, $G^- = G_1 \cup \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 = G_2 \cup \partial G_2$, $\overline{G}^+ = E^{(3)} \setminus G$, $\partial G^+ = \partial G_1$ представлены однородные тяготеющие массы известной плотности $\delta(\xi) = \delta_2(\xi) - \delta_1(\xi)$ – разность плотностей смежных слоёв, где $\xi \in \overline{G}_2$, $\delta(\xi) = 0$ при $\xi \in \overline{G}_0$.

Для такого описания среды получены аналитические модели поля и геологической среды. Модель поля – уравнение силы тяжести, полученное из 2D рассмотрения нормального потенциала силы тяжести в окрестности текущей точки измерений. Размер окрестности зависит от размеров тяготеющей области и точности аппроксимации нормальной составляющей потенциала (Дубовенко, 2011).

Для вытянутых вдоль простирания аномалий силы тяжести основное уравнение поля силы тяжести равно

$$u(x,0) = f\sigma \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + \zeta_2(\xi)}{(\xi - x)^2 + \zeta_1(\xi)} d\xi \qquad (1)$$

где $\zeta_1 = \zeta_1(\xi)$ и $\zeta_2 = \zeta_2(\xi)$, $a \le \xi \le b$ – кривые, ограничивающие снизу и сверху тяготеющую двумерную область *S*.

Для модели среды, в дополнение к известным в теории интерпретации потенциальных полей основным классам контактных поверхностей (Нумеров, 1930; Остромогильский, 1970; Страхов, 1974), введён новый класс контактных поверхностей. Это класс Чёрного – математическая модель контактной поверхности, описываемая так. В горизонтальной полосе G^-, ограниченной сверху и снизу прямыми $z_1 = h_1$, $z = h_2$, $0 < h_1 < h_2 < +\infty$, выделены 2 слоя (плотности δ_1 и δ_2). Их разделяет бесконечно гладкая кривая ∂G^-, звёздная относительно бесконечно удалённой точки, имеет асимптоту $z = h$, $h_1 < h < h_2$, причём

$$\left|z(\xi)-h\right|\le k\left|\xi\right|^{\alpha},\quad \alpha>0,\quad \left|\xi\right|>\xi_0,\quad z(\xi)\in\partial G^{-}. \tag{2}$$

Если значение h и величина скачка плотности $\Delta\delta=\delta_2-\delta_1$ известны, граница ∂G^{-} раздела слоёв по внешнему полю восстановима однозначно в классе Чёрного: $Ch^{(1,\beta)}(-\infty,\infty)\subset St^{(1,\beta)}(-\infty,\infty)$.

Поскольку эта модель отображает сложное распределение тяготеющих масс (*n* попарно непересекающихся рудных тел или границ раздела слоёв, рис. 1), то центральной проблемой является единственность решения обратной задачи гравиметрии.

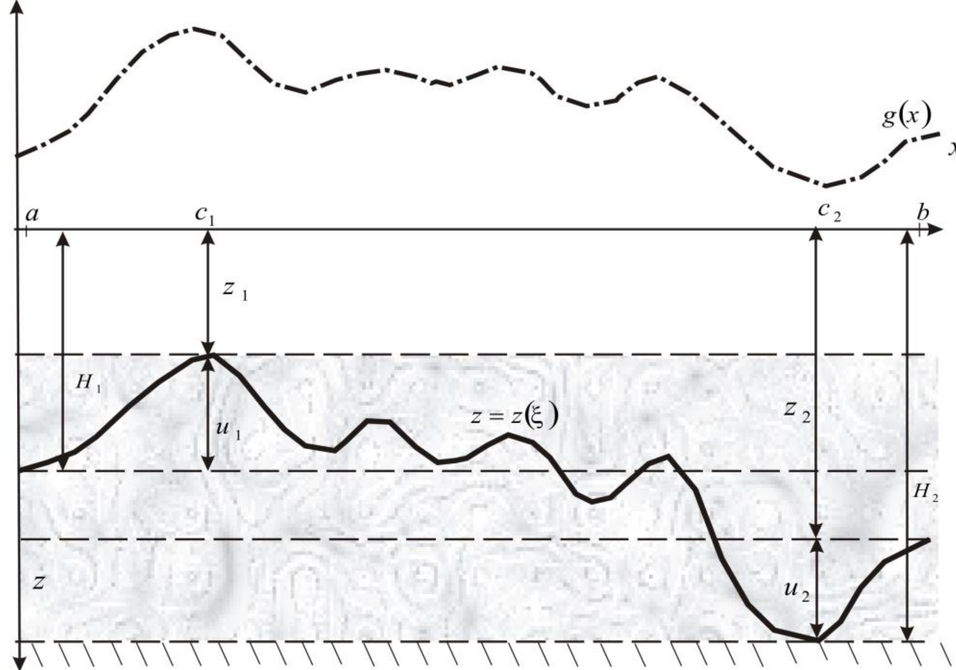


Рис. 1. Модель контактной среды в классе Черного.

Единственность имеет место в достаточно узких подклассах упомянутых классов моделей среды, т.е., при наличии большого объёма априорной информации об источниках. Если этого обеспечить нельзя, остаётся уповать на известные следствия из теорем разделения потенциальных полей. Они позволяют свести решение обратной задачи гравиметрии по любому внешнему полю от *n* масс к решению обратной задачи гравиметрии для отдельных объектов, по полям от этих объектов. Приведены теоремы разделения полей для нескольких односвязных объёмов и нескольких непересекающихся слоёв (популярные начальные приближения среды) в изучаемой модели.

Методика решения. В плоском случае (1) сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$g(x,z)=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\,d\xi \tag{3}$$

по отношению к искомой функции $z=z(\xi)$. Уравнение (3) удобно рассматривать, как функционал на неком линеале (множество допустимых решений). Оно популярно при восстановлении потенциала силы тяжести для вытянутых по простиранию масс. Задача имеет единственное решение на классе Страхова $St^{(1,\alpha)}(\Omega)$ (Старостенко и др., 1992).

Разлагая уравнение (3) в ряд по $z=z(\xi)$, вычисляя приращения $\Delta g(x,z)=g(x,z+h)-g(x,z)$, где $h(a)=h(b)=0$, можно предложить ряд алгоритмов восстановления контакта по заданному полю. В частности, используем модификацию метода Ньютона:

$$\Delta z(\xi)=z_{n+1}(\xi)-z_n(\xi), \tag{4}$$

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^{\,2}(\xi)}\,z_{n+1}(\xi)d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z_n^{\,2}(\xi)}\,d\xi-g(x)+\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^{\,2}(\xi)}\,\Delta z_n(\xi)d\xi,$$

либо модификации метода простых итераций типа „контакт” в двух версиях:

$$z_{n+1}(\xi)=z_n(\xi)+h_n(\xi),\ n=0,1,2,\dots,\ h_0(\xi)=0,$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}\,z_{n+2}(\xi)d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z_{n+1}^2(\xi)}\,d\xi-g(x)-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}\,z_{n+1}(\xi)d\xi; \tag{5}$$

$$z_{n+1}(\xi)=z_n(\xi)+h_n(\xi),\ n=0,1,2,\dots,\ \text{и}\ h_0(\xi)=0,\ a\le\xi\le b,$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}\,h_{n+1}(\xi)d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z_{n+1}^2(\xi)}\,d\xi-g(x)+\int_a^b \frac{(\xi-x)^2-z_n^2(\xi)}{[(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)]^2}\,h_n^2(\xi)d\xi. \tag{6}$$

В алгоритмах (4-6) можно кроме искомого элемента $z=z(\xi)$ определить асимптоту H = const, для чего по-

лучены соответствующие аналитические выражения:

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}\Delta z_n(\xi)d\xi-\int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2+H_n^2}\Delta H_n\, d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H_n^2}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}d\xi-g(x); \qquad (7)$$

$$z_{n+1}(\xi)=z_n(\xi)+h_n(\xi),\ H_{n+1}=H_n+\tau_n,\ n=0,1,2,\ldots,\ h_0(\xi)\equiv 0,\ \tau_0\equiv 0,\ a\le\xi\le b,$$

$$f'(z_n)\neq 0\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H_{n+1}^2}{(\xi-x)^2+z_{n+1}^2(\xi)}d\xi-g(x); \qquad (8)$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}h_{n+1}(\xi)d\xi+\int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2+H_n^2}\tau_{n+1}d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H_{n+1}^2}{(\xi-x)^2+z_{n+1}^2(\xi)}d\xi-g(x)-$$

$$-\int_a^b \frac{(\xi-x)^2-H_n^2}{[(\xi-x)^2+H_n^2]^2}\tau_n^2 d\xi+\int_a^b \frac{(\xi-x)^2-z_n^2(\xi)}{[(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)]^2}h^2(\xi)d\xi. \qquad (9)$$

Проблемы вычислений. В выражениях (4)-(9) существенна проблема выбора начального приближения контакта. Наши соображения таковы. Ввиду выбора модели среды (рис. 1) имеем дело с многоэкстремальной кривой аномалии силы тяжести. Определим на ней наибольший максимум и наименьший минимум аномалии $g_S=g(c_i)=\sup\{\underset{[c,d]}{extr}\, g(x)\}$, $g_i=g(c_j)=\inf\{\underset{[c,d]}{extr}\, g(x)\}$, и то же для приближения контакта $z_S=z(c_i)=\sup\{\underset{[c,d]}{extr}\, z(\xi)\}$, $z_i=z(c_j)=\inf\{\underset{[c,d]}{extr}\, z(\xi)\}$. Затем задаём нулевое приближение контакта, каждый экстремум которого соответствует одноименному экстремуму поля силы тяжести в силу того, что $\delta>0$, одним из способов

$$z_0=z_0(\xi)=-H_0+\Delta g(\xi,H_0),\ a\le\xi\le b, \qquad (10)$$

$$z_0=z_0(\xi)=-H_0+k_0\Delta g(\xi),\ a\le\xi\le b, \qquad (11)$$

где $H_0>0$ – задаваемая константой „асимптота” функции z_0 на левом конце промежутка $[a,b]$, $\Delta g(\xi)=g(\xi)-g(a)$, $\Delta g(\xi,H_0)$ – аналитически продолженное значение $\Delta g(\xi)$ на уровне $-H_0$, $k_0=k(H_0)$ – определяемый весовой коэффициент.

Весовые коэффициенты определяем, исходя из преобразования выражения (3) в виде

$$g_S\ge\int_{a_1}^{b_1}\ln\frac{u^2+H^2}{u^2+z_S^2}du,\quad g_i\le\int_{a_1}^{b_1}\ln\frac{u^2+H^2}{u^2+z_i^2}du, \qquad (12)$$

где $u=\xi-c,\quad du=d\xi,\quad a_1=a-c,\quad b_1=b-c$. Этот интеграл можно получить в квадратурах – исходных для определения z_S и z_i при заданных H, g_S и g_i. А приближения z_n значений z_S, z_i определяем по схеме Чебышева (Березин, Жидков, 1960):

$$z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}-\frac{f''(z_n)f^2(z_n)}{2f'^3(z_n)}. \qquad (13)$$

где $f(z)$ – линейное преобразование полученных из (12) квадратур. Процесс (13) при удачном выборе z_n обладает быстрой сходимостью (3-4 итерации для получения $z^{(0)}$ с точностью 10^{-7}).

Выводы. Теоретически эти конструкции показывают лучшую сходимость по сравнению с классическими примерами (Гравиразведка, 1990), но их практическая эффективность требует проверки на подготовленном материале полевых гравиметрических съемок. Попытки обойтись грубыми приближениями z_S и z_i (вычисленными не по (13)), вообще говоря, успеха не имели, хотя в ряде случаев приводили к хорошим результатам.

Якимчик А.И. Технология оцифровки карт фактического материала на основе программного обеспечения MapInfo Professional и CorelDraw // Геофізичний журнал. – 2010. – **32**, № ?. – С. *–*;

Якимчик А.И. К вопросу о построении региональных аналитических аппроксимаций элементов аномальных гравитационных полей // Геофізичний журнал. – 2009. – **31**, № 1. – С. 121–124;

Чорний А.В., Дубовенко Ю.І. Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Геофізичний журнал. – 2002. – **24**, № 3. – С. 77–92;

Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К.: Наук. думка, 1978. – 228 с.

Дубовенко Ю.І. Про роздільну здатність редукцій аномалій сили тяжіння // Геофізичний журнал. – 2011. – 33, № 2. – С. 135–143;

Нумеров Б.В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // Докл. АН СССР. – 1930. – № 21. – С. 569–574;

Остромогильский А.Х. О единственности решения обратной задачи теории потенциала // ЖВМ и МФ. – 1970. – **10**, № 2. – С. 352–361;

Страхов В.Н. К теории обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1974, № 6. – С. 39-60;

Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В. Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности // Физика Земли. – 1992. – № 6. – С. 48–58; – 1993. – № 7. – С. 47–66;

Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. – Москва: Физматгиз, 1960. – С. 140–143;

Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. 2-е изд., перер. и доп. – Москва: Недра, 1990. – 607 с.

Dubovenko Yu.I., Chorha O.A. **About definition of density contact in the complex environment**